パラメターを含む量子カオス系における非交差間隔分布

東京大学 工学部　町田 学[1]，齊藤 圭司

外場をパラメターとして含む量子カオス系において、ある一つの準位に着目したときの非交差間のパラメター空間上での距離の分布 (隣接非交差間隔分布) について研究した結果を報告する。[1] 我々はまずランダム行列を用いて分布の特徴を明らかにし、さらに他の具体系においても同じ特徴が現れることを示した。

量子カオス系の準位の構造については、パラメターに依存するランダム行列を用いた研究がこれまで多くなされている。[2] 今回我々の着目した隣接非交差間隔は、よく知られているような非交差でのエネルギーギャップの大きさ等と異なり、パラメター空間上の非局所的な量である。パラメターを掃引する場合を考えると、隣接非交差間隔の逆数は系が Landau-Zener 型の非断熱遷移を起こす頻度を与える。

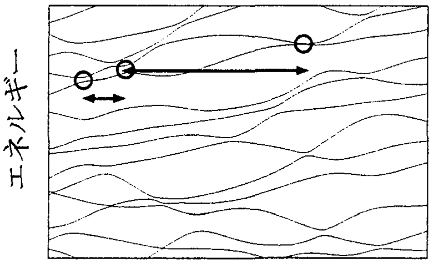

図 1: GOE の場合におけるパラメター λ の関数としてのエネルギー準位の図。図中に、隣接非交差間隔の例が二つ示されている。

ハミルトニアンは $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{V}$ で与えられる。$\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{V}$ はともに GOE もしくは GUE のランダム行列である。図 1 にこのハミルトニアンの準位と非交差間隔 ℓ の例を示した。1000×1000 のハミルトニアン行列の 50 個のサンプルから得られた ℓ の分布 $P(\ell)$ を図 2 に示す。ただし、$P(\ell)$ は $\int P(\ell)\mathrm{d}\ell = 1$, $\int \ell P(\ell)\mathrm{d}\ell = 1$ によって規格化されている。図 2 の挿入図は積算分布 $I(\ell)\,(= \int_0^\ell P(\ell')\mathrm{d}\ell')$ の立ち上がりの振舞いである。積算分布の立ち上がりを最小 2 乗法でフィットすることにより、我々は GOE の場合に $I_{\mathrm{O}}(\ell)$ が ℓ の 3 乗で、GUE の場合に $I_{\mathrm{O}}(\ell)$ が 4 乗で立ち上がることを見出した。つまり、$P_{\mathrm{O}}(\ell)$ は ℓ の 2 乗で、$P_{\mathrm{U}}(\ell)$ は 3 乗で立ち上がる。

我々はさらに具体的な量子系での隣接非交差間隔分布を求めてランダム行列の分布と比較した。その結果、エネルギー準位間隔分布が GOE の分布に対応する結合回転子系の場合は、隣接

[1]E-mail: machida@spin.t.u-tokyo.ac.jp

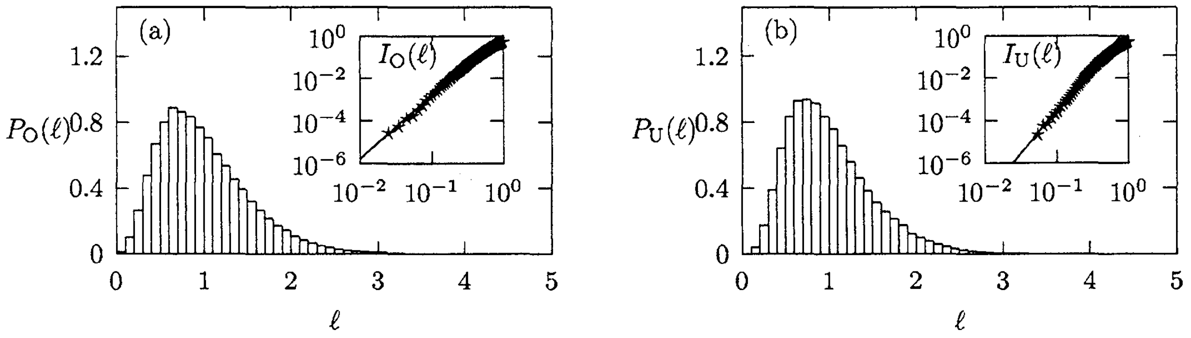

図 2: (a) GOE の場合の隣接非交差間隔分布 $P_{\rm O}(\ell)$ のヒストグラム。挿入図は積算分布 $I_{\rm O}(\ell)$ の原点付近での振舞い。$1.57\ell^{3.00}$ でよくフィットされる。(b) GUE の場合の隣接非交差間隔分布 $P_{\rm U}(\ell)$ のヒストグラム。挿入図は積算分布 $I_{\rm U}(\ell)$ の原点付近での振舞い。$2.9\ell^{4.02}$ でよくフィットされる。

非交差間隔分布は ℓ の 2 乗で立ち上がること、エネルギー準位間隔分布が GUE の分布に対応する Aharonov-Bohm ビリヤードの場合は、隣接非交差間隔分布は ℓ の 3 乗で立ち上がることを見出した。この結果は隣接非交差間隔分布 $P(\ell)$ が普遍的であることを示唆している。

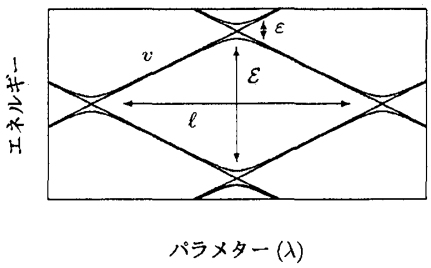

図 3: 二つの非交差が最も接近したときの図。

隣接非交差間隔分布 $P(\ell)$ の解析的な表式は未解決問題だが、分布の指数は次のような考察によって理解することができる。まず、二つの隣接する非交差が最も近づいたときには非交差の漸近線の傾きが等しくなると仮定する。つまり、そのとき図 3 のような準位構造が得られる。図中で、ℓ が非交差間隔、v が傾きである。$\mathcal{E}$ と ε はそれぞれ最大と最小の準位間隔である。これより、$\ell \simeq \frac{\mathcal{E}}{v}$ を得る。v の分布 $P_{\rm slope}(v)$ はすでに知られており、また $\mathcal{E}$ の分布 $P_{\rm max}(\mathcal{E})$ も簡単な考察で見積もることができる。したがって、ℓ の分布 $P(\ell)$ は下式のように見積もられる。

$$P(\ell) \propto \int_0^\infty \mathrm{d}v \int_0^\infty \mathrm{d}\mathcal{E} P_{\rm slope}(v) P_{\rm max}(\mathcal{E}) \delta\left(\ell - \frac{\mathcal{E}}{v}\right) \sim \ell^{\beta+1} \quad (\ell \ll 1)$$

ただし、GOE の場合は $\beta = 1$、GUE の場合は $\beta = 2$ である。

参考文献

[1] M. Machida and K. Saito, submitted to J. Phys. A: Math. Gen.

[2] T. Guhr T, A. Müller-Groeling, and A. Weidenmüller, Physics Reports **299** (1998), 189.